Тренировочная работа №2 по МАТЕМАТИКЕ
11 класс

13 декабря 2023 года
Вариант МА2310209
(профильный уровень)

Выполнена: ФИО_________________________________ класс _______

Инструкция по выполнению работы

Работа по математике состоит из двух частей, включающих в себя 19 заданий. Часть 1 содержит 12 заданий с кратким ответом базового и повышенного уровней сложности. Часть 2 содержит 7 заданий с развёрнутым ответом повышенного и высокого уровней сложности.

На выполнение экзаменационной работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут).

Ответы к заданиям 1–12 записываются в виде целого числа или конечной десятичной дроби.

При выполнении заданий 13–19 требуется записать полное решение на отдельном листе бумаги.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. Записи в черновике не учитываются при оценивании работы.

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются.

Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

Желаем успеха!

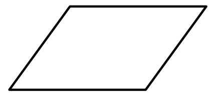
Справочные материалы

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$
$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta$$

Часть 1

Ответом к каждому из заданий 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите ответы к заданиям в поле ответа в тексте работы.

1 Сумма двух углов параллелограмма равна $46°$. Найдите один из оставшихся углов. Ответ дайте в градусах.

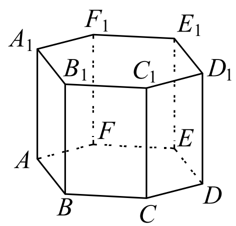


Ответ: ___________________________.

2 Длины векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равны $3\sqrt{5}$ и $4\sqrt{10}$, а угол между ними равен $45°$. Найдите скалярное произведение $\vec{a}\cdot\vec{b}$.

Ответ: ___________________________.

3 Найдите объём многогранника, вершинами которого являются точки B, C, E, F, B_1, C_1, E_1, F_1 правильной шестиугольной призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, площадь основания которой равна 10, а боковое ребро равно 12.



Ответ: ___________________________.

4 В случайном эксперименте бросают две игральные кости. Найдите вероятность того, что сумма выпавших очков равна 7. Результат округлите до сотых.

Ответ: ___________________________.

5 Две фабрики выпускают одинаковые стёкла для автомобильных фар. Первая фабрика выпускает $30\,\%$ этих стёкол, вторая — $70\,\%$. Первая фабрика выпускает $5\,\%$ бракованных стёкол, а вторая — $4\,\%$. Найдите вероятность того, что случайно купленное в магазине стекло для автомобильной фары окажется бракованным.

Ответ: ___________________________.

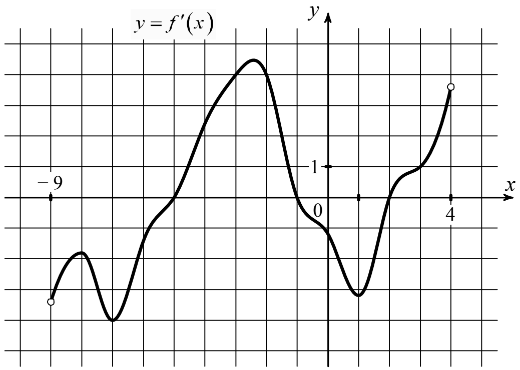
6 Решите уравнение $\sqrt{7x+18}=x$. Если уравнение имеет больше одного корня, в ответе запишите меньший из корней.

Ответ: ___________________________.

7 Найдите значение выражения $\dfrac{5\left(m^5\right)^6+13\left(m^3\right)^{10}}{\left(2m^{15}\right)^2}$ при $m=\dfrac{5}{13}$.

Ответ: ___________________________.

8 На рисунке изображён график функции $y=f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-9;4)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции $f(x)$ параллельна прямой $y=2x-9$ или совпадает с ней.



Ответ: ___________________________.

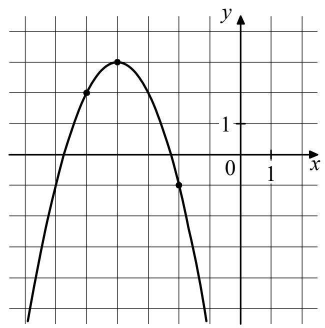
9 Зависимость объёма спроса q (единиц в месяц) на продукцию предприятия-монополиста от цены p (тыс. рублей за единицу) задаётся формулой $q=70-2p$. Выручка предприятия r (в тыс. рублей за месяц) вычисляется по формуле $r(p)=q\cdot p$. Определите наибольшую цену p, при которой месячная выручка $r(p)$ составит не менее 600 тыс. рублей. Ответ дайте в тысячах рублей за единицу.

Ответ: ___________________________.

10 Теплоход проходит по течению реки до пункта назначения 280 км и после стоянки возвращается в пункт отправления. Найдите скорость течения, если скорость теплохода в неподвижной воде равна 17 км/ч, стоянка длится 6 часов, а в пункт отправления теплоход возвращается через 40 часов после отплытия из него. Ответ дайте в км/ч.

Ответ: ___________________________.

11 На рисунке изображён график функции $f(x)=ax^2+bx+c$. Найдите значение $f(2)$.



Ответ: ___________________________.

12 Найдите наименьшее значение функции $y=13\cos x-17x+6$ на отрезке $\left[-\dfrac{3\pi}{2};0\right]$.

Ответ: ___________________________.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте отдельный лист. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13 а) Решите уравнение $4\sin 2x-4\sqrt{3}\sin x+12\cos x-6\sqrt{3}=0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-4\pi;-\frac{5\pi}{2}\right]$.

14 В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания AB равна 10, а боковое ребро SA равно 7. На рёбрах AB и SC отмечены точки L и N соответственно, причём $AL:LB=SN:NC=1:4$. Плоскость α содержит прямую LN и параллельна прямой BC.

а) Докажите, что плоскость α параллельна прямой SA.

б) Найдите угол между плоскостями α и SBC.

15 Решите неравенство $\frac{x^3-27}{|x-3|}-x|x-3|\geq 0$.

16 В июле 2025 года планируется взять кредит в банке на сумму 800 тысяч рублей на 10 лет. Условия его возврата таковы:
— в январе 2026, 2027, 2028, 2029 и 2030 годов долг возрастает на 18 % по сравнению с концом предыдущего года;
— в январе 2031, 2032, 2033, 2034 и 2035 годов долг возрастает на 16 % по сравнению с концом предыдущего года;
— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
— в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года;
— к июлю 2035 года кредит должен быть полностью погашен.
Найдите общую сумму выплат после полного погашения кредита.

17 Диагонали равнобедренной трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC перпендикулярны. Окружность с диаметром AD пересекает боковую сторону CD в точке M, а окружность с диаметром CD пересекает основание AD в точке N. Отрезки AM и CN пересекаются в точке P.

а) Докажите, что точка P лежит на диагонали BD трапеции $ABCD$.

б) Найдите расстояние от точки P до боковой стороны AB, если $BC=17$, $AD=31$.

18 Найдите все значения a, при каждом из которых неравенство

$$3a(a-2)-(a-2)\left(2^{x+2}+2\right)\leq\left(x^2-4x\right)\left(2^{x+2}+2\right)-3ax^2+12ax$$

имеет решения на промежутке $(0;1]$.

19 Есть четыре коробки: в первой коробке находятся 93 камня, во второй — 94, в третьей — 95, а в четвёртой коробке камней нет. За один ход берут по одному камню из любых трёх коробок, всего три камня, и кладут в оставшуюся. Сделали некоторое количество таких ходов.

а) Могло ли в первой коробке оказаться 89 камней, во второй — 94, в третьей — 95, а в четвёртой — 4?

б) Могло ли в четвёртой коробке оказаться 282 камня?

в) Какое наибольшее число камней могло оказаться в первой коробке?

math100.ru

Ответы на тренировочные варианты 2310209-2310212 (профильный уровень) от 13.12.2023

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2310209	157	60	80	0,17	0,043	9	4,5	3	20	3	- 33	19
2310210	139	90	120	0,03	0,031	7	1,5	4	12	2	- 46	14
2310211	105	- 60	35	0,5	0,96	- 9	7	3	3000	18	11	40
2310212	125	- 65	42	0,25	0,84	- 8	5	2	4000	24	34	24

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

13

а) Решите уравнение $4\sin 2x-4\sqrt{3}\sin x+12\cos x-6\sqrt{3}=0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-4\pi;-\frac{5\pi}{2}\right]$.

Решение.

а) Преобразуем уравнение:

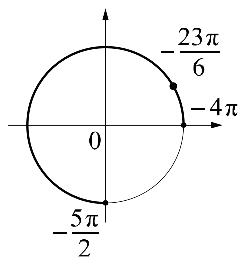
$$8\sin x\cos x-4\sqrt{3}\sin x+12\cos x-6\sqrt{3}=0;$$
$$(4\sin x+6)\left(2\cos x-\sqrt{3}\right)=0,$$

откуда следует, что $\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ или $\sin x=-\frac{3}{2}$.

Уравнение $\sin x=-\frac{3}{2}$ решений не имеет, а из уравнения $\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ получим

$$x=\pm\frac{\pi}{6}+2\pi k,\ k\in Z.$$

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[-4\pi;-\frac{5\pi}{2}\right]$.



Получим число $-\frac{23\pi}{6}$.

Ответ: а) $-\frac{\pi}{6}+2\pi k$, $k\in Z$; $\frac{\pi}{6}+2\pi n$, $n\in Z$; б) $-\frac{23\pi}{6}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а*. ИЛИ Получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов: пункта *а* и пункта *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

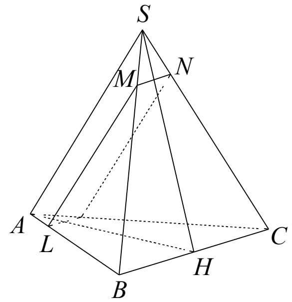
14

В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания AB равна 10, а боковое ребро SA равно 7. На рёбрах AB и SC отмечены точки L и N соответственно, причём $AL:LB=SN:NC=1:4$. Плоскость α содержит прямую LN и параллельна прямой BC.

а) Докажите, что плоскость α параллельна прямой SA.

б) Найдите угол между плоскостями α и SBC.

Решение.



а) Пусть плоскость α пересекает ребро SB в точке M. Поскольку прямая BC параллельна плоскости α, прямые MN и BC параллельны, а значит,

$$SM:MB=SN:NC=AL:LB.$$

Следовательно, прямые LM и SA параллельны. Таким образом, плоскость α, содержащая прямую LM, параллельна прямой SA.

б) Пусть точка H — середина ребра BC. Тогда медианы AH и SH треугольников ABC и SBC соответственно являются их высотами, а значит, плоскость ASH перпендикулярна прямой BC.

Следовательно, плоскость ASH перпендикулярна плоскости α, параллельной прямой BC, и плоскости SBC, содержащей прямую BC.

Значит, искомый угол равен углу между прямой l, по которой пересекаются плоскости α и ASH, и прямой SH. Так как прямая l параллельна прямой AS, этот угол равен углу ASH или смежному с ним.

В треугольнике ASH имеем:

$$AS=7,\ AH=5\sqrt{3},\ SH=\sqrt{SB^2-BH^2}=\sqrt{SB^2-\frac{BC^2}{4}}=2\sqrt{6}.$$

По теореме косинусов

$$\cos\angle ASH=\frac{SA^2+SH^2-AH^2}{2\cdot SA\cdot SH}=\frac{49+24-75}{2\cdot 7\cdot 2\sqrt{6}}=-\frac{\sqrt{6}}{84}.$$

Ответ: б) $\arccos\frac{\sqrt{6}}{84}$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Получен обоснованный ответ в пункте *б*. ИЛИ Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2

Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*. ИЛИ При обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки. ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	*3*

15

Решите неравенство $\frac{x^3-27}{|x-3|}-x|x-3|\ge 0$.

Решение.

Преобразуем левую часть неравенства:

$$\frac{x^3-27-x(x-3)^2}{|x-3|}\ge 0;\quad \frac{(x-3)\left(x^2+3x+9-x^2+3x\right)}{|x-3|}\ge 0;$$

$$\frac{3(x-3)(2x+3)}{|x-3|}\ge 0.$$

Отсюда получаем, что $x\le -1{,}5$ или $x>3$.

Ответ: $(-\infty;-1{,}5]$, $(3;+\infty)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точки $-1{,}5$. ИЛИ Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

16

В июле 2025 года планируется взять кредит в банке на сумму 800 тысяч рублей на 10 лет. Условия его возврата таковы:
— в январе 2026, 2027, 2028, 2029 и 2030 годов долг возрастает на 18 % по сравнению с концом предыдущего года;
— в январе 2031, 2032, 2033, 2034 и 2035 годов долг возрастает на 16 % по сравнению с концом предыдущего года;
— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
— в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года;
— к июлю 2035 года кредит должен быть полностью погашен.
Найдите общую сумму выплат после полного погашения кредита.

Решение.

По условию долг перед банком (в тысячах рублей) по состоянию на июль 2025–2035 годов должен уменьшаться до нуля следующим образом:

800; 720; 640; 560; 480; 400; 320; 240; 160; 80; 0.

В январе каждого года с 2026 по 2030 долг возрастает на 18 %, а в январе каждого года с 2031 по 2035 — на 16 %, значит, последовательность размеров долга (в тысячах рублей) в январе 2026–2035 годов такова:

944; 849,6; 755,2; 660,8; 566,4; 464; 371,2; 278,4; 185,6; 92,8.

Таким образом, выплаты (в тысячах рублей) должны быть следующими:

224; 209,6; 195,2; 180,8; 166,4; 144; 131,2; 118,4; 105,6; 92,8.

Значит, общая сумма выплат (в тысячах рублей) составит

$$224+209{,}6+195{,}2+180{,}8+166{,}4+144+131{,}2+118{,}4+105{,}6+92{,}8=1568.$$

Ответ: 1,568 млн рублей.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

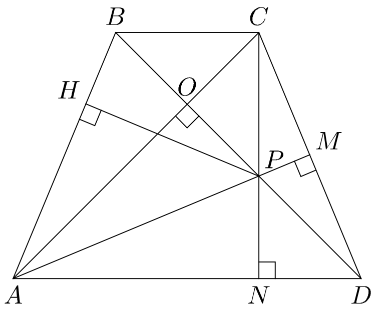
17

Диагонали равнобедренной трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC перпендикулярны. Окружность с диаметром AD пересекает боковую сторону CD в точке M, а окружность с диаметром CD пересекает основание AD в точке N. Отрезки AM и CN пересекаются в точке P.

а) Докажите, что точка P лежит на диагонали BD трапеции $ABCD$.

б) Найдите расстояние от точки P до боковой стороны AB, если $BC=17$, $AD=31$.

Решение.



а) Точка M лежит на окружности с диаметром AD, поэтому прямая AM перпендикулярна прямой CD, т. е. AM — высота треугольника ACD. Аналогично CN — высота треугольника ACD. Пусть O — точка пересечения диагоналей трапеции. По условию задачи прямая DO перпендикулярна прямой AC, значит, DO — третья высота треугольника ACD. Высоты треугольника пересекаются в одной точке, следовательно, точка P пересечения высот AM и CN лежит на прямой OD, а значит, на диагонали BD.

б) Точка N — основание высоты трапеции, опущенной на основание AD, поэтому

$$DN=\frac{1}{2}(AD-BC)=\frac{1}{2}(31-17)=7,\quad AN=\frac{1}{2}(AD+BC)=\frac{1}{2}(31+17)=24.$$

Трапеция равнобедренная, а её диагонали перпендикулярны, поэтому $\angle CAD=\angle ADB=45^\circ$.

Значит, $BP=BC\sqrt{2}=17\sqrt{2}$, $AO=\frac{AD}{\sqrt{2}}=\frac{31}{\sqrt{2}}$, $CN=AN=24$.

По теореме Пифагора $AB=CD=\sqrt{DN^2+CN^2}=\sqrt{24^2+7^2}=25$.

Растояние от точки P до боковой стороны AB равно высоте PH треугольника APB, опущенной на сторону AB, а так как AO также высота этого треугольника, получаем, что $AB\cdot PH=BP\cdot AO$.

Следовательно, $PH=\frac{BP\cdot AO}{AB}=\frac{17\sqrt{2}\cdot\frac{31}{\sqrt{2}}}{25}=\frac{527}{25}=21{,}08$.

Ответ: б) 21,08.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Получен обоснованный ответ в пункте *б*. ИЛИ Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2

Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*. ИЛИ При обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки. ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	*3*

18 Найдите все значения a, при каждом из которых неравенство

$$3a(a-2)-(a-2)\left(2^{x+2}+2\right)\le\left(x^2-4x\right)\left(2^{x+2}+2\right)-3ax^2+12ax$$

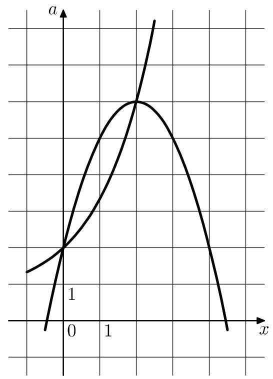
имеет решения на промежутке $(0;1]$.

Решение.

Рассмотрим неравенство как квадратное относительно a.

$$3a(a-2)-(a-2)\left(2^{x+2}+2\right)-\left(x^2-4x\right)\left(2^{x+2}+2\right)+3ax^2-12ax\le 0;$$

$$\left(3a-2^{x+2}-2\right)\left(a+x^2-4x-2\right)\le 0.$$



Изобразим графики функций $a=\frac{4}{3}\cdot 2^x+\frac{2}{3}$ и $a=-x^2+4x+2$ на плоскости xOa.

Общие точки графиков — $(0;2)$ и $(2;6)$, что можно проверить подстановкой их координат в уравнения $a=\frac{4}{3}\cdot 2^x+\frac{2}{3}$ и $a=-x^2+4x+2$.

Больше двух точек быть не может в силу противоположной выпуклости данных кривых.

На промежутке $(0;1]$ решения неравенства есть тогда и только тогда, когда $2<a\le 5$.

Ответ: $2<a\le 5$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a, отличающееся от искомого только включением точки $a=2$	3
С помощью верного рассуждения получено множество значений $2 \le a \le 6$, возможно, не включая концы. ИЛИ Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом верно выполнены все шаги решения	2
Задача верно сведена к исследованию возможного значения корней уравнения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*4*

19 Есть четыре коробки: в первой коробке находятся 93 камня, во второй — 94, в третьей — 95, а в четвёртой коробке камней нет. За один ход берут по одному камню из любых трёх коробок, всего три камня, и кладут в оставшуюся. Сделали некоторое количество таких ходов.
а) Могло ли в первой коробке оказаться 89 камней, во второй — 94, в третьей — 95, а в четвёртой — 4?
б) Могло ли в четвёртой коробке оказаться 282 камня?
в) Какое наибольшее число камней могло оказаться в первой коробке?

<u>Решение.</u>
а) Пусть 2 раза из первых трёх коробок переложили камни в четвёртую. Тогда в первой коробке оказался 91 камень, во второй — 92 камня, в третьей — 93 камня, а в четвёртой — 6 камней. Если после этого переложить камни из первой, третьей и четвёртой коробок во вторую, то в первой коробке окажется 90 камней, во второй — 95, в третьей — 92, а в четвёртой — 5. Если после этого переложить камни из первой, второй и четвёртой коробок в третью, то в первой коробке окажется 89 камней, во второй — 94, в третьей — 95, а в четвёртой — 4.
б) Если в четвёртой коробке оказалось 282 камня, то в первой, во второй и в третьей коробках не осталось камней.
Пусть в какой-то момент в коробках оказалось a, b, c и d камней соответственно. Тогда после одного хода в коробках могло оказаться либо $a-1$, $b-1$, $c-1$ и $d+3$ камня, либо $a-1$, $b-1$, $c+3$ и $d-1$ камень, либо $a-1$, $b+3$, $c-1$ и $d-1$ камень, либо $a+3$, $b-1$, $c-1$ и $d-1$ камень соответственно. Заметим, что разность между количествами камней во второй и в первой коробках либо не изменилась, либо изменилась на 4. Сначала разность количеств камней во второй и в первой коробках

равнялась 1. Следовательно, ни в какой момент она не могла стать равной 0. Значит, в этих двух коробках всегда разное число камней. Следовательно, в четвёртой коробке не могло оказаться 282 камней.
в) Сначала разность количеств камней в любых двух коробках не делится на 4. Следовательно, ни в какой момент в двух коробках не могло оказаться одинаковое число камней. Значит, во второй, в третьей и в четвёртой коробках не меньше $0+1+2=3$ камней суммарно, а в первой коробке не больше 279 камней.
Покажем, что в первой коробке могло оказаться 279 камней. Пусть 24 раза из первых трёх коробок переложили камни в четвёртую. Тогда в первой коробке оказалось 69 камней, во второй — 70, в третьей — 71, а в четвёртой — 72. Если после этого 70 раз переложить камни из второй, третьей и четвёртой коробок в первую, то в первой коробке окажется 279 камней, во второй — 0 камней, в третьей — 1 камень, а в четвёртой — 2 камня.
Ответ: а) да; б) нет; в) 279.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в пунктах *а*, *б* и *в*	4
Обоснованно получен верный ответ в пункте *в*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или *б*	3
Обоснованно получены верные ответы в пунктах *а* и *б*. ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в пункте *в*	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*4*